



CONAMA10
CONGRESO NACIONAL
DEL MEDIO AMBIENTE

COMUNICACIÓN TÉCNICA

Aplicación del análisis multifractal en series temporales de ozono troposférico en localidades de Andalucía

Autor: Nazaret M^a Montilla López

Institución: Universidad de Córdoba

e-mail: g02molon@uco.es

Otros Autores: Francisco J. Jiménez-Hornero (Universidad de Córdoba); Eduardo Gutiérrez de Ravé (Universidad de Córdoba); Pablo Pavón-Domínguez (Universidad de Córdoba); Ana Belén Ariza Villaverde (Universidad de Córdoba)

RESUMEN

El ozono troposférico se localiza en la región inferior de la atmósfera terrestre y a concentraciones elevadas puede llegar a ser un riesgo para la salud humana. En ciertas zonas de la Unión Europea, entre las que se encuentra el sur de la Península Ibérica, se superan con cierta frecuencia los umbrales fijados en la Directiva 2002/3/CE relativa al ozono en el aire. Su predicción y control es bastante complejo puesto que el ozono muestra un marcado comportamiento estacional y su concentración varía en función de complejos procesos químicos en los que intervienen tanto sus precursores (procedentes principalmente de la actividad antropogénica) y algunas variables meteorológicas, que influyen de manera determinante en su formación y transporte. Con el objeto de profundizar en el comportamiento y evolución de las series temporales de ozono, se aplica el formalismo del análisis multifractal, a través del cual se pueden constatar patrones reproducibles a diferentes escalas. Esta metodología se basa en el cálculo de la función de probabilidad de masa en intervalos temporales de diferente tamaño, a partir de la cual se obtiene la función de partición para varios momentos estadísticos. Finalmente se determinan los parámetros multifractales ($f(\alpha)$ y α), cuya representación es conocida como espectro multifractal. Los datos utilizados para el análisis son series temporales de ozono tomadas cada 10 min durante los meses de enero, abril, julio y octubre del año 2007. Estos datos proceden de las estaciones de medición que la Consejería de Medio Ambiente de Junta de Andalucía tiene distribuidas por el territorio andaluz. Las características como la heterogeneidad en los valores altos y bajos de concentraciones en las series temporales se determinan mediante el análisis de los espectros multifractales. Los primeros resultados obtenidos muestran espectros con formas convexas, que confirman la naturaleza multifractal de las series temporales de ozono. Debido a las particularidades climáticas de cada localidad, se aprecian diferencias notables entre sus espectros, confirmándose además un comportamiento estacional. El análisis multifractal completa la información proporcionada por la estadística descriptiva, pudiéndose establecer correlaciones significativas entre ésta y los parámetros multifractales.

Palabras Clave: Ozono, análisis multifractal, contaminación urbana

1 INTRODUCCIÓN

El ozono es un gas constituyente natural del aire que se encuentra principalmente en la estratosfera (90%). El resto del ozono que existe en la atmósfera se forma y se encuentra a nivel troposférico, pudiéndose convertir en tóxico para los seres humanos a concentraciones elevadas. Los principales precursores del ozono son los óxidos de nitrógeno (NOx) y los compuestos orgánicos volátiles (VOCs), que se emiten de forma natural y se ven incrementados con la actividad humana. Estos compuestos químicos en condiciones meteorológicas de altas temperaturas y radiación solar intensa, producen un aumento en las concentraciones de ozono.

El ozono es un gas irritante que puede tener repercusiones importantes para la salud humana existiendo un riesgo añadido para determinados grupos de población (niños, asmáticos, etc.).

Actualmente existe una directiva del Parlamento y del Consejo Europeo, donde se establecen los valores umbrales y de alerta, y los objetivos a largo plazo para la reducción de las concentraciones de ozono tanto en las áreas urbanas como rurales.

Dicha concentración presenta patrones cíclicos, tanto diarios (Dueñas et al., 2002) como estacionales (Tsai et al., 2008) y debido a las reacciones complejas que tienen lugar en su formación, limitan el uso de la estadística descriptiva en su análisis.

La incidencia en Andalucía es más acusada debido a la existencia de núcleos industriales, ciudades medianas, altamente pobladas y condiciones meteorológicas como el incremento de temperatura de la ciudad de Córdoba, que junto con el gran número de horas de luz diarias recibidas a partir del mes de enero, favorecen la formación del ozono. Por otro lado, la ciudad de Granada, caracterizada por ubicarse a una mayor altitud que la ciudad de Córdoba, presenta menores temperaturas medias anuales.

El análisis multifractal ha sido aplicado a la caracterización del ozono, ya que este método proporciona información adicional a la obtenida de otras alternativas usadas como la estadística descriptiva.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1 MULTIFRACTALIDAD

Una de las principales ventajas que posee la teoría de los fractales es analizar los sistemas sin escala característica o sin rasgos determinados, debido a su invariancia, por ello, la teoría de los fractales es aplicable en numerosos sistemas. Las propiedades estadísticas de estos sistemas para diferentes escalas vienen dadas por simples coeficientes, que buscan y analizan características independientes del tamaño físico del objeto o del sistema de estudio (García, 2007).

Por lo tanto, debido a la heterogeneidad que presenta la geometría en la naturaleza, la aproximación fractal se puede aplicar como un método analítico que proporciona información adicional a la obtenida por la estadística descriptiva.

2.2 FRACTAL Y MULTIFRACTAL

El concepto de conjunto fractal (fractal, del latín *fractus*, fracturado, irregular o quebrado), fue dado a conocer por B. Mandelbrot en 1975, para hacer referencia a objetos demasiado irregulares como para ser descritos por la geometría tradicional.

A la geometría fractal se le asignan como características más destacables:

- Autosimilitud
- Irregularidad para ser descrito en términos tradicionales.

La autosimilaridad queda reflejada en los fractales deterministas regulares, como la curva de Von Koch o el triángulo de Sierpinsky.

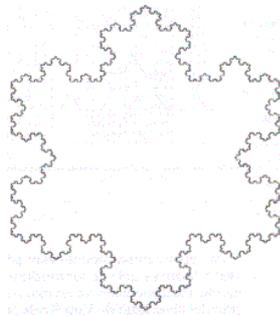


Fig. Curva Von Koch

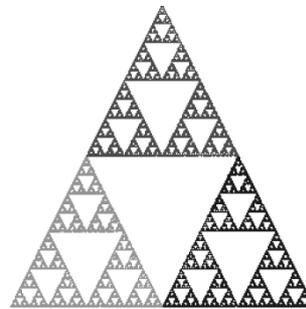


Fig. Triángulo de Sierpinsky

El concepto de *multifractal* surge para incluir a conjuntos aún más complejos. El análisis multifractal ha sido usado con éxito en la descripción de series temporales de datos en diversas disciplinas como la geofísica, hidrología o economía. Estos resultados justifican la exploración que se hace en este trabajo de su aplicación al estudio de la estructura temporal de concentraciones de contaminantes atmosféricos como es el caso del ozono.

3 CLIMA DE ANDALUCÍA

Las características climáticas de Andalucía se derivan básicamente de su localización, comprendida entre 36°N en su punto más meridional y 38°44' N en el más septentrional, por tanto, se encuentra en la zona templado-cálida. Su situación próxima al continente africano influye en la llegada de vientos calurosos. Su transición entre dominios climáticos diferentes la convierte en una zona de encuentro de masas de aire de origen diverso, formadas en áreas alejadas de Andalucía.

Al encontrarse situada en la zona límite de acción de los grandes anticiclones subtropicales y los grandes ciclones polares, provoca que existan dos estaciones muy bien diferenciadas verano e invierno. De esta forma, el verano en Andalucía se encuentra bajo la acción de la estabilidad generada por los anticiclones subtropicales; y durante el invierno, el desplazamiento de éstos hacia el sur, permite que los centros de acción

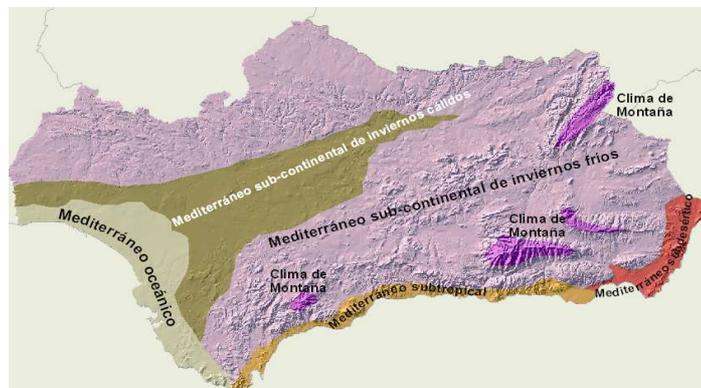
polares lleguen hasta Andalucía generando un clima inestable, debido a la circulación general atmosférica.

Longitudinalmente se encuentra entre el Océano Atlántico -que contribuye a suavizar las temperaturas y a generar abundantes masas de aire húmedo- y la cuenca mediterránea, que al ser más pequeña y cerrada ejerce menor influencia. Este hecho puede generar en algunos momentos mucha inestabilidad, acentuada por lo abrupto del relieve en la costa, produciéndose las llamadas *gotas frías* o tormentas de verano.

3.1 FACTORES CONDICIONANTES DEL CLIMA DE ANDALUCÍA

Andalucía posee rasgos climáticos peculiares derivados de factores de orden geográfico debido a sus complejidades morfológicas, ya que el relieve supone una variación altimétrica, barreras frente a vientos, cambios de orientación respecto a tipos de tiempo y masas de aire, cuya influencia llega a plasmarse en las características termodinámicas. Además cabe destacar otros factores de orden termodinámico, ligados a la situación relativa de Andalucía frente a la circulación atmosférica.

Aunque de manera global el clima de Andalucía es Mediterráneo, los factores descritos anteriormente hacen que nos encontremos con gran diversidad de climas. Entre ellos se distinguen: clima mediterráneo de tipo subtropical, de montaña, climas influenciados por el mar Mediterráneo, Oceánico etc. La meteorología en Andalucía tiene efectos distintos entre unas partes a otras de la región.



Fuente: Junta de Andalucía

3.1.1 Factores de orden geográfico

3.1.1.1 Factor situación

La latitud en la que se encuentra Andalucía le confiere las características propias de un clima mediterráneo, cuyo rasgo más marcado es la sequía estival, con marcados contrastes entre regiones con alta precipitación (Grazalema) y el desierto almeriense de Tabernas.

3.1.1.2 Factor relieve

Morfológicamente Andalucía presenta grandes diferencias de altitud, factor importante, ya que la temperatura disminuye con la altura, generando desde climas subtropicales a los de tundra. Por ejemplo, la zona de las Cordilleras Béticas actúa como barrera de los vientos húmedos procedentes del Océano (disimetría pluviométrica) o como barrera frente a los vientos fríos, generando mecanismos tipo Föhn, y con ello, contrastes climáticos entre barlovento-sotavento. Por otro lado, la depresión Bética permite el paso de los vientos al interior de la región debido a su escasa altura.

La altitud hace que se incrementen las precipitaciones en las zonas montañosas, existiendo grandes diferencias con las áreas a nivel del mar.

3.1.2 Factores de orden termodinámico

Andalucía resulta también afectada por la circulación general de la atmósfera, que determina la existencia de grandes masas de aire que inciden de manera diferente en el clima de la región. En verano se produce el desplazamiento hacia el hemisferio Norte de todos los centros que componen la circulación general atmosférica, provocando que nos encontremos bajo la acción de las altas presiones como el anticiclón de las Azores, mientras que en invierno el desplazamiento se produce hacia el sur provocando situaciones de estabilidad e inestabilidad que se suceden alternativamente (corriente en chorro o "jet stream").

4 METODOLOGÍA

4.1. SERIES TEMPORALES DE OZONO

En este trabajo los datos utilizados para el análisis son series temporales de ozono tomadas cada 10 min durante los meses de enero, abril, julio y octubre del año 2007 en la estación de medición de Lepanto, localizada en Córdoba (37.53°N 4.47°W) y en la estación Granada Norte situada en la ciudad de Granada (37.11°N 3.35°W). Estas estaciones de medición pertenecen a Red de Vigilancia y Control de la Contaminación Atmosférica de la Consejería de Medio Ambiente de la Junta de Andalucía, y tienen como finalidad la observación y el control de la calidad del aire en el territorio andaluz.



Fuente: <http://www.eventplannerspain.com>

La temperatura media es más elevada en la ciudad Córdoba, enclavada en el Valle del Guadalquivir, que en Granada, debido principalmente a que se sitúa en el centro de la comarca Vega de Granada a una altitud de 738 msnm, en una depresión formada por el río Genil y Sierra Nevada, que condiciona su climatología, en contraposición de la ciudad de Córdoba situada a una altitud de 120 msnm.

Las series temporales de ozono tomadas en las estaciones de Lepanto y Granada Norte se encuentran representadas en la Fig. 1 y Fig. 2 respectivamente, y las medias, coeficientes de variación (CV), sesgo y kurtosis se enumeran en la Tabla 1 para la ciudad de Córdoba y en la Tabla 2 para Granada. Podemos observar que el comportamiento estacional de Córdoba es muy similar al descrito por Adame et al. (2008) para la ciudad de Sevilla, ya que se sitúa muy próxima a ésta encontrándose ambas en el interior del Valle del Guadalquivir. Según estos autores, las condiciones en otoño e invierno no son favorables para la formación de ozono, debido a que las temperaturas son las más bajas del año y la humedad relativa incrementa.

Por lo tanto, las condiciones atmosféricas serán más favorables para la formación de ozono desde el final del mes de enero hasta el verano, donde el incremento de la radiación y temperatura hace que la descomposición del dióxido de nitrógeno en monóxido sea más rápida [$\text{NO}_2(\text{g}) + \text{luz} \rightarrow \text{NO}(\text{g}) + \text{O}(\text{g})$] y el óxido atómico hace que se forme el ozono. Este es uno de los procesos que llevan a la formación del ozono en las capas bajas de la atmósfera. Otros contaminantes atmosféricos, a través de procesos similares, también promueven la formación de ozono.

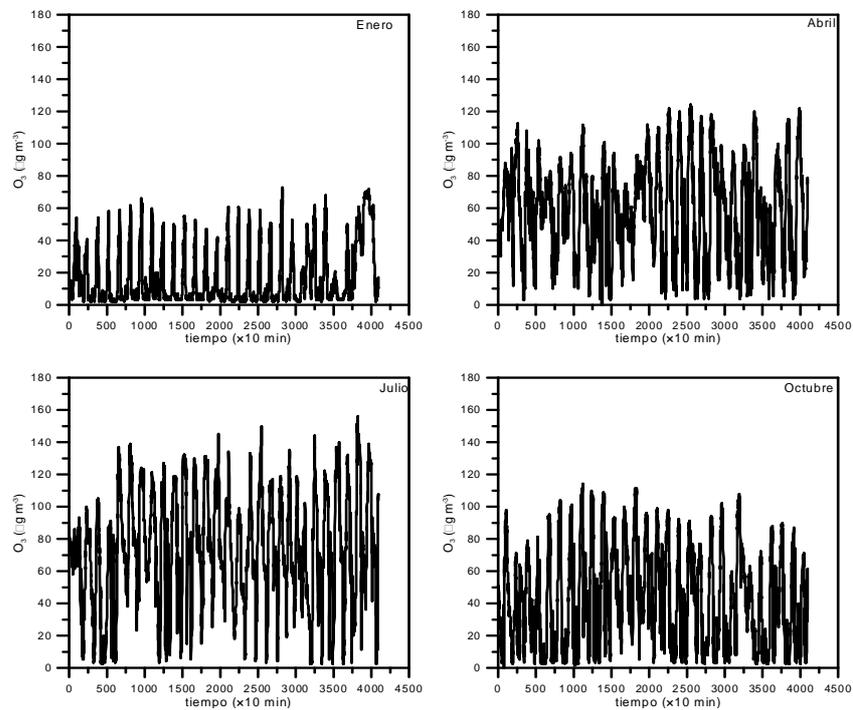


Fig. 1 Series temporales de concentraciones de Ozono en la ciudad de Córdoba.

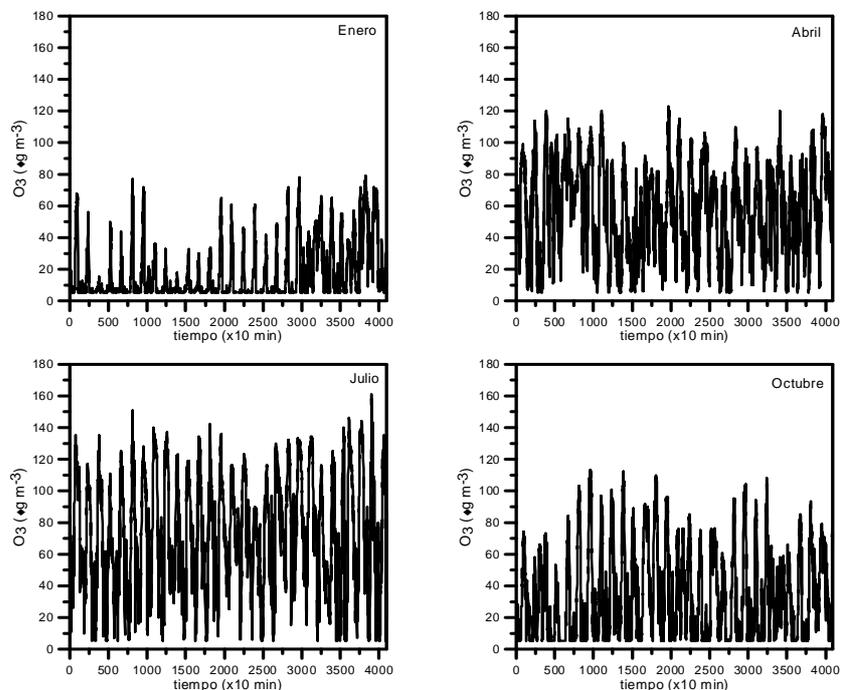


Fig. 2 Series temporales de concentraciones de Ozono en la ciudad de Granada.

Las Figs. 1 y 2 nos muestran una similitud estacional entre los meses de abril y julio en las series temporales de concentraciones de ozono analizadas en este trabajo en las ciudades objeto de estudio.

Tabla 1. Resultados obtenidos del análisis estadístico de series temporales de ozono en la ciudad de Córdoba.

Estadística Descriptiva. Córdoba

	N	Media	CV	Sesgo	Kurtosis
Enero	4096	16,866	1,082	1,270	0,389
Abril	4096	59,409	0,499	0,018	-0,878
Julio	4096	73,424	0,471	-0,140	-0,710
Octubre	4096	42,997	0,714	0,352	-1,027

Las medias de los registros de las concentraciones de ozono en la ciudad de Córdoba como en la de Granada poseen unos valores parecidos, siendo el mes de enero el que posee el valor más bajo seguido de octubre, abril y julio. Los valores del coeficiente de variación son más altos para los meses de enero y octubre, e inferiores en los meses correspondientes a las estaciones de primavera-verano, los cuales poseen las medias más altas. El sesgo para los meses de enero, abril y julio es positivo, sin embargo, en el mes de julio es negativo, por lo tanto existe dispersión en los valores de ozono pequeños y concentración de los valores grandes. El coeficiente de kurtosis sólo es positivo en el mes de enero, por lo que la forma achatada de la distribución será en los meses de julio, abril y octubre.

Tabla 2. Resultados obtenidos del análisis estadístico de series temporales de ozono en la ciudad de Granada.

Estadística Descriptiva. Granada

	N	Media	CV	Sesgo	Kurtosis
Enero	4096	16,488	1,063	1,622	1,531
Abril	4096	57,127	0,518	-0,028	-0,986
Julio	4096	72,251	0,497	0,004	-0,952
Octubre	4096	33,603	0,855	0,778	-0,557

En las Tablas 1 y 2 se muestran los resultados aportados por la estadística descriptiva. El coeficiente de variación es notablemente inferior en los meses de abril y julio en ambas ciudades, lo que nos indica que existe mayor dispersión de los valores. Por otro lado, en otoño- invierno, podemos deducir del coeficiente de variación que existe una menor dispersión de los valores de las concentraciones de ozono, ya que la media también es inferior a la de los meses correspondientes a las estaciones de primavera- verano. El sesgo de abril y julio, se encuentra muy próximo a 0, indicándonos la simetría de la distribución para estos meses, en contraposición del mes de enero cuyo valor del coeficiente de sesgo positivo muestra la existencia de pocos valores grandes y muy dispersos y concentraciones de ozono en valores pequeños.

El coeficiente de kurtosis muestra un valor alto en el mes de enero, lo que indica una forma acampanada de la distribución de los valores, sin embargo los meses de abril, julio y octubre al ser negativos poseen una forma más achatada.

4.2 ANÁLISIS MULTIFRACTAL

El formalismo conocido como “strange attractor” (Hentschel and Procaccia, 1983; Grassberger, 1983; Halsey et al., 1986) fue usado para realizar el análisis multifractal de series temporales de ozono. Este formalismo se ocupa de la dimensión fractal del conjunto geométrico asociado con las singularidades de la medida. Para su aplicación, la serie se divide en intervalos no solapados de una cierta resolución temporal, δ . Por lo tanto, δ y la concentración de ozono c_i caracterizan el intervalo i . El tiempo mínimo de resolución, δ_{ini} , fue seleccionado de manera que cada intervalo inicial contuviera al menos una muestra de la concentración del ozono, c_{ini} . La concentración de ozono fue preparada para ser igual al valor de la medida o a la media, si había más de una muestra en cada intervalo inicial. De esta manera, la función de probabilidad de masa $c_i(\delta)$ en la resolución temporal δ es definida en cada intervalo i como: (e.g. Kravchenko et al., 1999)

$$c_i(\delta) = \frac{c_i}{\sum_{j=1}^{n_{ini}} (c_{ini})_j} \quad (1)$$

donde c_i se calcula a partir de los valores c_{ini} , y n_{ini} es el número de intervalos iniciales de resolución temporal δ_{ini} . La distribución de la función de probabilidad de masa se analizó empleando el método de los momentos (Evertsz and Mandelbrot, 1992), en el que la función de partición $\chi(q, \delta)$ de orden q se calcula a partir de los valores $c_i(\delta)$:

$$\chi(q, \delta) = \sum_{i=1}^n [c_i(\delta)]^q \quad (2)$$

siendo n el número de intervalos de resolución temporal δ y $q \in (-\infty, \infty)$. La función de partición tiene la siguiente propiedad para una medida multifractal

$$\chi(q, \delta) \approx \delta^{\tau(q)} \quad (3)$$

donde $\tau(q)$ es una función no lineal de q (Feder, 1988) conocida como la función exponente de masa. Para cada valor de q , $\tau(q)$ se puede obtener como la pendiente del segmento lineal de un gráfico log-log de $\chi(q, \delta)$ frente a δ . Para $q \gg 1$, el valor de $\chi(q, \delta)$ se determina principalmente por los mayores valores de los datos, mientras que la contribución de los valores más pequeños es más importante cuando $q \ll -1$ (Kravchenko et al., 1999). El exponente de Lipschitz-Hölder o de singularidad α cuantifica

la importancia de las singularidades de la medida de una variable. Su valor se calcula de la relación $c_i(\delta) \sim \delta^\alpha$, cuando $\delta \rightarrow 0$. α es conocido también como la dimensión fractal local y puede ser determinado de la transformación de Legendre de la curva $\tau(q)$ (Evertsz and Mandelbrot, 1992):

$$\alpha(q) = \frac{d\tau(q)}{dq} \quad (4)$$

Si $N(\alpha, \delta)$ es el número de intervalos de una resolución temporal δ , en la que se encuentra un valor α , $f(\alpha)$ se define a partir de la siguiente relación:

$$N(\alpha, \delta) \approx \delta^{-f(\alpha)} \quad (5)$$

$f(\alpha)$ puede ser considerada como la dimensión fractal del conjunto de intervalos que correspondientes a una singularidad α . El gráfico de $f(\alpha)$ frente a α se denomina espectro multifractal. $f(\alpha)$ puede calcularse a partir de (e.g. Chhabra and Jensen, 1989; Chhabra et al., 1989).

$$f(\alpha) = q\alpha(q) - \tau(q) \quad (6)$$

El espectro es una parábola invertida cuando $c_i(\delta)$ está distribuida multifractalmente con un intervalo de valores de α más amplio conforme la heterogeneidad de la distribución aumenta. En el caso de una distribución monofractal de $c_i(\delta)$, α es el mismo para todos los intervalos de la misma resolución temporal y el espectro multifractal es un único punto (e.g. Kravchenko et al., 1999). Los valores extremos en la distribución de c están asociados con los valores más pequeños de $f(\alpha)$, ($f(\alpha_{\min})$ y $f(\alpha_{\max})$), de manera que los valores más altos y más bajos de concentración de ozono corresponden respectivamente a las partes izquierda y derecha del espectro. El mayor valor de $f(\alpha)$ se corresponde con la dimensión de capacidad de soporte (ej. 1, cuando se trata de series temporales 1-D).

5 RESULTADOS

El objetivo es obtener el espectro multifractal para comprobar la naturaleza multifractal de las series temporales de ozono. Para ello, necesitamos definir el momento estadístico “ q ”, el cual fijamos entre (-10, 10). Para cada valor de q obtenemos una nube de puntos que se ajusta a una regresión lineal, obteniendo la representación logarítmica de la función de partición $\chi(q, \delta)$ frente a la resolución temporal, $\delta = \delta_{ini} = 2$ datos (20 min) a $\delta = 2^{12} = 4.096 \times 10^3$ min para los meses de enero, abril, julio y octubre. Como ejemplo de dicha función de partición se muestra en la Fig. 3 los ajustes para la ciudad de Córdoba, comprobándose que el valor de la pendiente para cada momento es el valor de $\tau(q)$ para cada valor de q . Este mismo procedimiento se realiza para las series temporales de Granada.

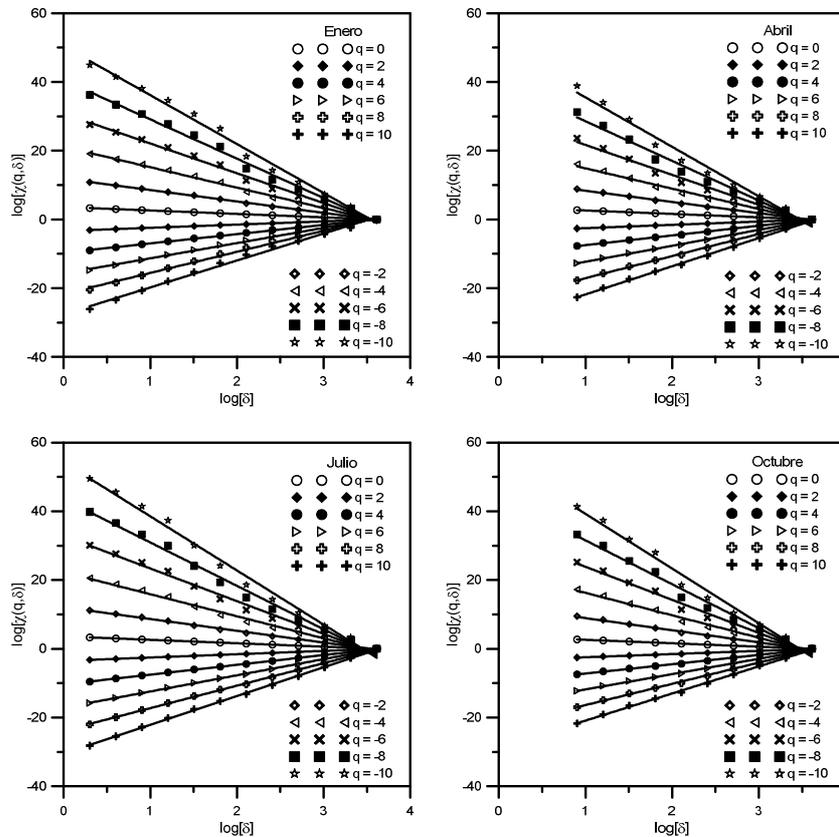


Fig. 3 Representación logarítmica de la función de partición $\chi(q, \delta)$ frente a la resolución temporal, δ .

La función del exponente de masa $\tau(q)$ para los diferentes meses fue obtenida a partir de las pendientes de los ajustes lineales de la función de partición en la ciudad de Córdoba y se muestra en la Fig. 4 (a) y 4 (b) para las concentraciones de ozono consideradas.

Se puede comprobar cómo las pendientes de $\tau(q)$ son diferentes para $q < 0$ y para $q > 0$ en ambos casos. Las curvas $\tau(q)$ son convexas y distintas de la línea recta que se corresponde con el caso monofractal. Esta diferencia es mayor conforme la heterogeneidad geométrica del medio se incrementa.

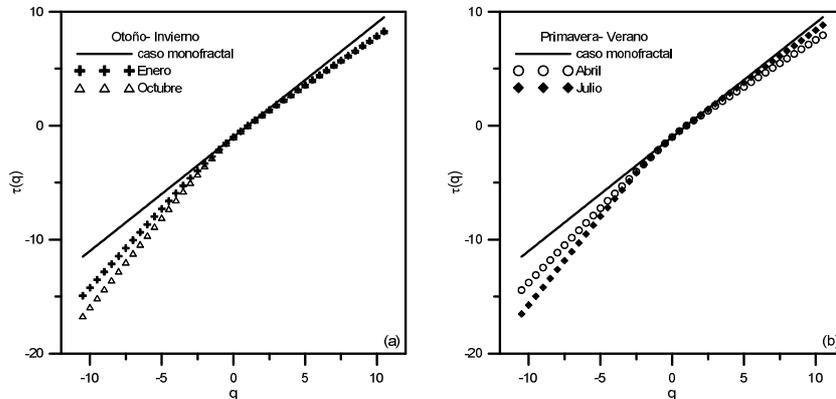


Fig. 4 (a) y (b), Funciones de exponentes de masa $\tau(q)$ en la ciudad de Córdoba.

Las curvas $\tau(q)$ correspondientes a los meses de enero y octubre se superponen para valores $q > 0$. Sin embargo, para valores $q < 0$ encontramos una situación diferente, que se explica con la ayuda de los espectros multifractales $f(\alpha)$ mostrados en la fig. 5 (a) y 5 (b) que son parábolas invertidas, hecho que prueba la naturaleza multifractal de las series temporales de ozono.

En esta figura se muestra una longitud más larga de la rama derecha correspondiente a los valores pequeños de las concentraciones de ozono, indicando la gran heterogeneidad existente entre los valores pequeños de las series temporales. Esta heterogeneidad es menos acusada para los meses correspondientes a las estaciones de otoño-invierno y principalmente en el mes de enero. La rama izquierda, como se prueba en la figura 5, tanto para las estaciones de otoño-invierno como para la de primavera-verano se encuentran casi superpuestas, hecho que confirma la similitud entre estaciones para altos valores de concentraciones de ozono. En el mes de julio la heterogeneidad es menor al ser su rama izquierda más corta.

En los espectros multifractales $f(\alpha)$ de O_3 mostrados en la Fig. 5, puede observarse cómo el espectro del mes de octubre es más ancho ($\alpha_{max} - \alpha_{min}$) indicando una mayor variabilidad en las concentraciones de ozono.

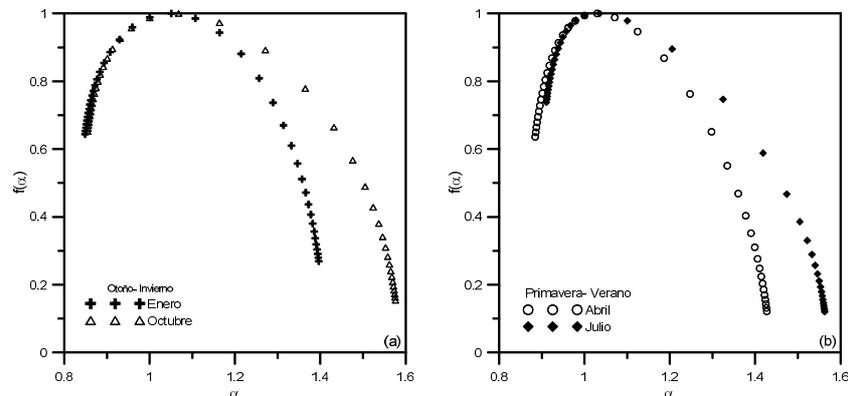


Fig. 5 (a) y (b), espectros multifractales $f(\alpha)$ en la ciudad de Córdoba.

Como se muestra en la Tabla 3, el rango del espectro $\alpha_{max} - \alpha_{min}$, incrementa en orden Abril < Enero < Julio < Octubre, aunque su coeficiente de variación que aparece en la Tabla 1 no se incrementa conforme a esa secuencia. Según Lee et al. (2006), se debe a que $\alpha_{max} - \alpha_{min}$ representa el rango entre los valores altos y bajos de ozono y el número de altas y bajas concentraciones de ozono se refiere a la parte izquierda o derecha del espectro respectivamente.

Tabla 3. Parámetros obtenidos del espectro multifractal que se muestra en las figuras 5(a) y 5(b) en la ciudad de Córdoba.

Parámetros Multifractales. Córdoba

	α_{\min}	α_{\max}	$\alpha_{\max} - \alpha_{\min}$	$f(\alpha_{\min})$	$f(\alpha_{\max})$
Enero	0,848	1,396	0,548	0,644	0,269
Abril	0,884	1,427	0,543	0,635	0,121
Julio	0,910	1,562	0,652	0,737	0,120
Octubre	0,854	1,576	0,722	0,652	0,154

Las curvas $\tau(q)$ de la Fig. 6(b) correspondientes a los meses de abril y julio en Granada se superponen tanto para valores $q > 0$ como para los valores $q < 0$, mientras que en la Fig. 6(a) las pendientes de $\tau(q)$, son diferentes en ambos casos. Las curvas $\tau(q)$ son convexas y distintas del caso monofractal. Esta diferencia es mayor conforme aumenta el grado de multifractalidad de las series temporales de ozono aumenta.

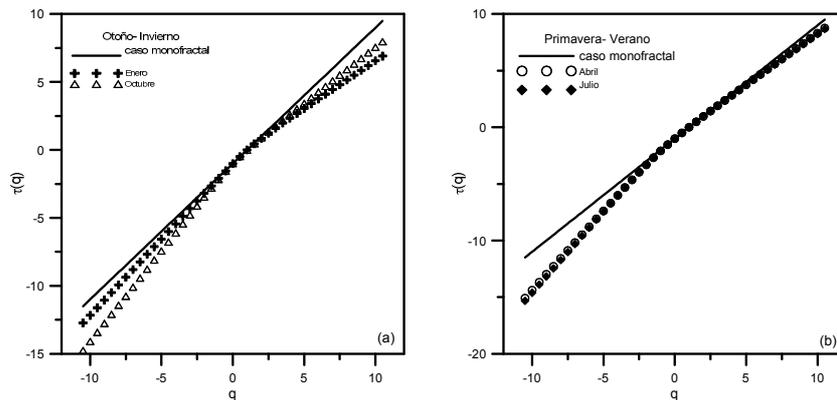


Fig. 6 (a) y (b), Funciones de exponentes de masa $\tau(q)$ en la ciudad de Granada.

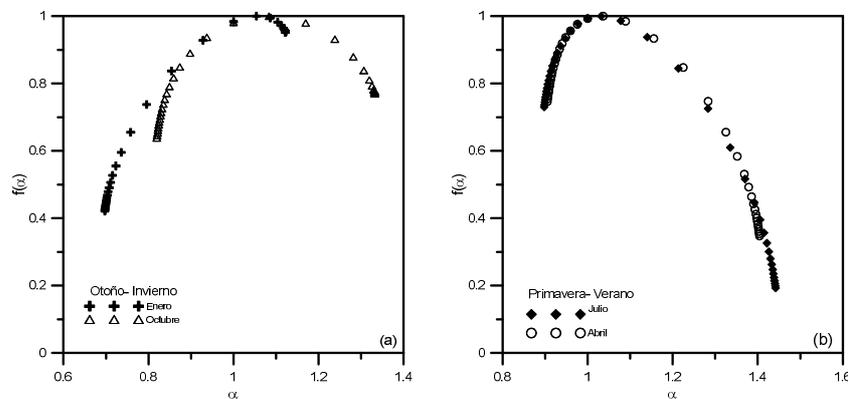


Fig. 7 (a) y (b), espectros multifractales $f(\alpha)$ en la ciudad de Granada.

La naturaleza multifractal del ozono es evidente en la Fig. 7, espectros con forma de parábolas invertidas donde destaca la mayor heterogeneidad de valores grandes del mes de enero sobre el mes de octubre, debido a que posee una rama izquierda de mayor longitud que la correspondiente al mes de octubre. Este mes está caracterizado por tener las ramas del espectro más cortas, revelando este hecho la presencia de valores más homogéneos cuyas concentraciones oscilan entre 5 y 10 $\mu\text{g}/\text{m}^3$. En la estación de otoño-invierno, la acumulación de puntos en los extremos es más acusada, lo que indica la existencia de valores extremos lejanos de la media.

En la Tabla 4 se muestran los valores de $\alpha_{\max} - \alpha_{\min}$ en los meses de estudio, siendo mayor el valor del mes de julio, demostrándose así la mayor heterogeneidad de sus valores con respecto a los meses de enero, abril y octubre. Las variaciones de los valores pequeños explican el coeficiente de variación que se muestra en la Tabla 3.

Parámetros Multifractales. Granada					
	α_{\min}	α_{\max}	$\alpha_{\max} - \alpha_{\min}$	$f(\alpha_{\min})$	$f(\alpha_{\max})$
Enero	0,697	1,122	0,425	0,420	0,950
Abril	0,905	1,404	0,499	0,342	0,745
Julio	0,897	1,441	0,544	0,730	0,192
Octubre	0,819	1,331	0,512	0,638	0,778

Tabla 4. Parámetros obtenidos del espectro multifractal que se muestra en las figuras 7(a) y 7(b) en la ciudad de Granada.

6 CONCLUSIONES

El análisis multifractal se ha mostrado como una herramienta adecuada y eficiente para caracterizar las concentraciones de ozono como consecuencia de su gran versatilidad con resultados satisfactorios para las ciudades objetivo de estudio: Córdoba y Granada cuyas características climáticas poseen notables diferencias basándose principalmente en su enclave geográfico. El cual, le confiere unas condiciones bien diferenciadas en cuanto a temperatura y humedad relativa, factores que intervienen directamente en la formación de ozono, aumentando o disminuyendo éste según la estación del año en la que nos encontremos.

Los espectros multifractales obtenidos en la ciudad de Córdoba son asimétricos, presentando ramas derechas más largas, lo que se relaciona con una mayor heterogeneidad en los valores pequeños de las concentraciones de ozono.

En la ciudad de Granada se han obtenido unos espectros multifractales para los meses de abril y julio con gran similitud.

Por otro lado se destaca el espectro para el mes de enero, con una concentración en el extremo de la rama derecha de valores pequeños, lo que deja de manifiesto la homogeneidad en dichos valores de las concentraciones de ozono durante dicho mes.

El método seguido permite completar la información aportada por la estadística descriptiva, ya que detecta la presencia de valores extremos y explica el origen de la heterogeneidad y variabilidad de la distribución de las concentraciones de ozono.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo prestado por la Consejería de Economía, Innovación y Ciencia (Junta de Andalucía) en el Proyecto RNM- 3989. Nuestro agradecimiento también a la Consejería de Medio Ambiente (Junta de Andalucía) por las series temporales de ozono que han sido facilitadas.

7 REFERENCIAS

- Chhabra, A. B., & Jensen, R. V. (1989). Direct determination of the $f(\alpha)$ singularity spectrum. *Physical Review Letters*, 62, 1327–1330.
- Dueñas, C., Fernandez, M. C., Cañete, S., Carretero, J., & Liger, E. (2002). Assessment of ozone variations and meteorological effects in an urban area in the Mediterranean Coast. *Science of the Total Environment*, 299, 97–113.
- Evertsz, C. J. G., & Mandelbrot, B. B., 1992. Multifractal measures (Appendix B), In H. O. Peitgen et al. (Eds.), *Chaos and Fractals* (pp. 922–953). New York: Springer-Verlag.
- Feder, J. (1988). *Fractals*. New York: Plenum Press.
- García Marín, A. P. (2007) *Análisis multifractal de series de datos pluviométricos en Andalucía*, Tesis doctoral.
- Grassberger, P. (1983). Generalized dimensions of strange attractors. *Physics Letters A*, 97, 227–230.
- Halsey, T. C., Jensen, M. H., Kadanoff, L. P., Procaccia, I., & Shraiman, B. I. (1986). Fractal measures and their singularities: the characterization of strange sets. *Physical Review A*, 33, 1141–1151.
- Hentschel, H. G. E., & Procaccia, I. (1983). The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors. *Physica D*, 8, 435–444.
- Kravchenko, A. N., Boast, C. W., & Bullock, D. G. (1999). Multifractal analysis of soil spatial variability. *Agronomy Journal*, 91, 1033–1041.
- Lee, C. K. (2002). Multifractal characteristics in air pollutant concentration time series. *Water, Air, & Soil Pollution*, 135, 389–409.

Lee, C. K., Juang, L. C., Wang, C. C., Liao, Y. Y., Yu, C. C., Liu, Y. C., & Ho, D. S. (2006). *Scaling characteristics in ozone concentration time series (OCTS)*. *Chemosphere*, 62, 934–946.

Mandelbrot B. 1975. *Les objets fractals: forme, hazard et dimension*. Flammarion, Paris.

Tsai, D. H., Wang, M. L., Wang, C. H., & Chan, C. C. (2008). *A study of ground-level ozone pollution, ozone precursors and subtropical meteorological conditions in central Taiwan*. *Journal of Environmental Monitoring*, 10, 109–118.